

Satz 21.2 : // implizite Funktionen

// -71-

Sei $\boxed{n > m}$, U offen in $\mathbb{R}^n$ und

$f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$. x_0 sei aus U mit

$f(x_0) = 0$, d. h.

$$x_0 \in N_f := \{x \in U : f(x) = 0\}.$$

$f'(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ habe

maximalen Rang $= m$.



O. E. Seien die letzten m Spalten

von

$$f'(x_0) \cong$$

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f^1 & \dots & \partial_{n-m+1} f^1 & \dots & \partial_n f^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^m & \dots & \partial_{n-m+1} f^m & \dots & \partial_n f^m \end{pmatrix}$$

$m \times m$

linear unabhängig, d.h. die
Ableitungen von f nach den letzten
 m Variablen sind l.u. in $\mathbb{R}^m$, also

$$\det \boxed{} \neq 0.$$

Mit $k := n - m$ schreiben wir
für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{x} := (x_1, \dots, x_{n-m}) = (x_1, \dots, x_k).$$

Dann gibt es eine offene Umgebung

V von x_0 in U ,

eine offene Umgebung

D von $\hat{x}_0$ in $\mathbb{R}^k$

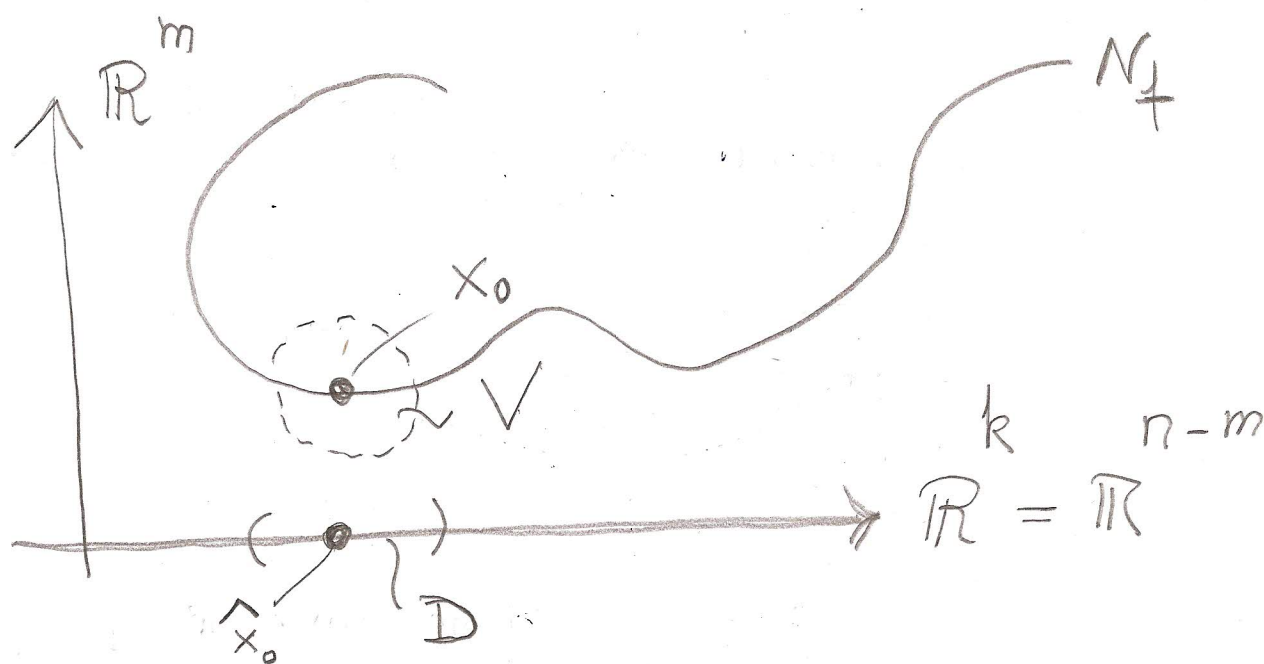
sowie $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ mit

-73-

$$(1) \quad \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^i} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ k+1 \leq j \leq n}} \neq 0 \quad \text{auf } \underline{V}$$

und

$$(2) \quad N_f \cap V = \text{Graph}(f).$$



„ Die Nullstellenmenge von f ist lokal
 bei x_0 als Graph über $D \subset \mathbb{R}^k$
 dargestellt.“

Diskussion von Beispielen und Spezialfällen -74-
nach dem

Beweis von Satz 21.2 : Die Beh. (1)
gilt nach Vor. in $x_0 \xrightarrow{\varphi \in C^1}$

$\exists$ Umg. $U^* \subset U$ von x_0 mit (1) auf U^* ;

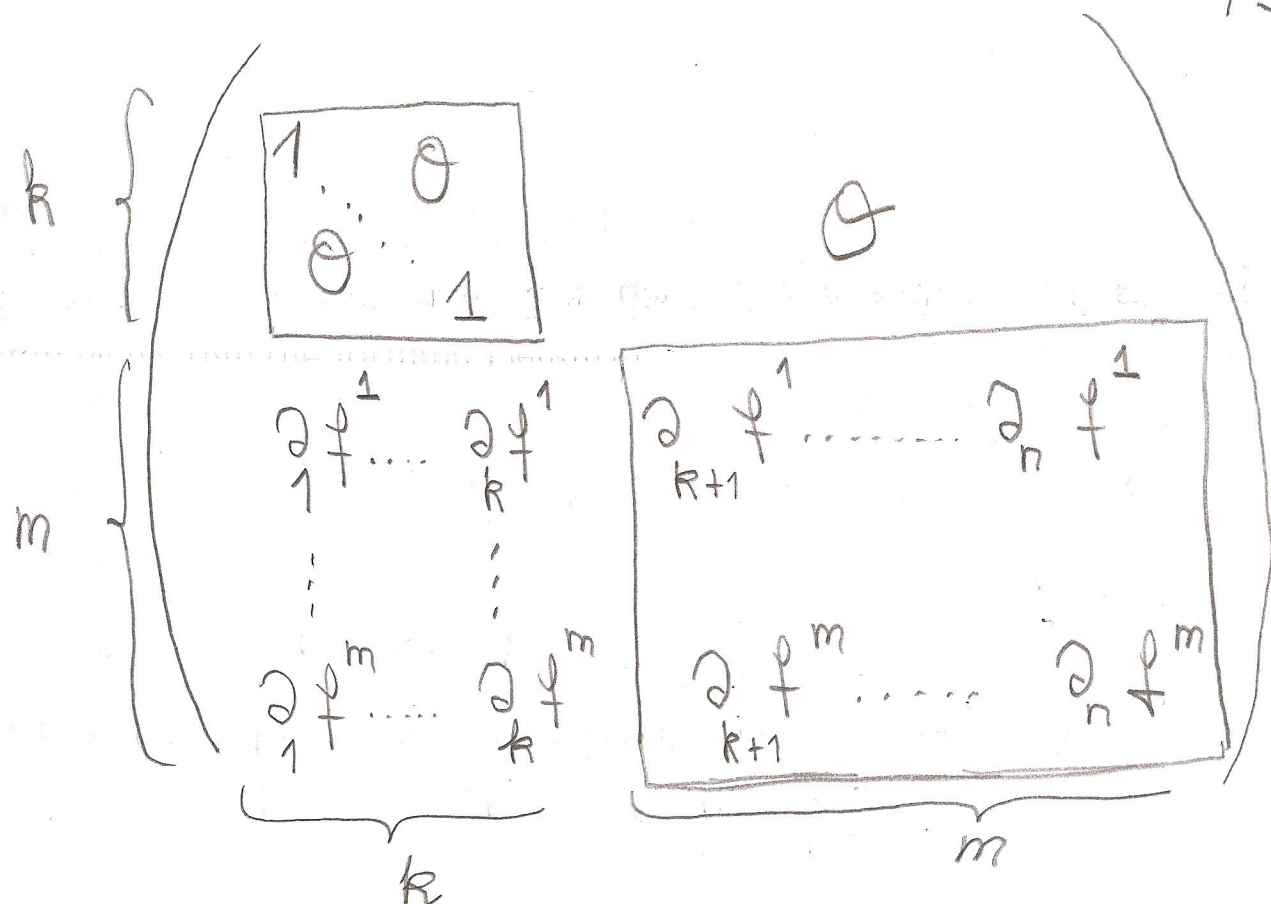
sei $\overline{F} : U^* \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\overline{F}^i(x) := \begin{cases} x^i, & 1 \leq i \leq k = n-m \\ \varphi^{i-k}(x), & k+1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

d.h. $\overline{F}(x) = (\hat{x}, \varphi(x))$ $\implies$

$$\overline{F} \in C^1(U^*, \mathbb{R}^n)$$

mit Jacobi-Matrix



Kästchensatz $\implies \det F'(x) =$

$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x) \neq 0;$

Satz 21.1 $\implies$

$\exists$ offene Umgebung $V \subset U^*$ von x_0 ,

-76-

so dass $\overline{F}(V) \subset \mathbb{R}^n$ offen ist

und $G := (\overline{F}|_V)^{-1} \in C^1(\overline{F}(V), V)$

existiert. Sei dann

$$D := \{ \hat{x} \in \mathbb{R}^k : (\hat{x}, 0) \in \overline{F}(V) \}.$$

Beachte:

i) $\boxed{\hat{x}_0 \in D}$:

es gilt $\varphi(x_0) = 0 \implies \overline{F}(x_0) =$

$$(\hat{x}_0, \varphi(x_0)) = (\hat{x}_0, 0); \quad \text{wegen } \overline{F}(x_0) \in V$$

folgt $\hat{x}_0 \in D$.

ii) $\boxed{D \text{ offen in } \mathbb{R}^k}$: das folgt aus

der Offenheit von $\overline{F}(V)$ in $\mathbb{R}^n$ (wieso?)

$$i) + ii) \implies$$

$D =$ offene Umgebung von $\hat{x}_0$ in $\mathbb{R}^k$.

Weiter gilt für $x \in V$ folgende Kette von Äquivalenzen:

$$x \in N_f \stackrel{\text{Def.}}{\iff} f(x) = 0 \iff F(x) = (\hat{x}, 0)$$

$$\iff \hat{x} \in D, \text{ und } \underbrace{x = G(F(x))}_{(*)} = G(\hat{x}, 0)$$

$$\text{Sei } \gamma : D \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

$$\gamma(\hat{x}) := \left(G^{k+1}(\hat{x}, 0), \dots, G^n(\hat{x}, 0) \right).$$

Dann gilt:

$$(*) \iff x = (\hat{x}, \gamma(\hat{x}))$$

$$\text{Es folgt: } N_f \cap V = \text{Graph}(\gamma).$$



Bemerkungen:

- 1.) $f \in C^l$ für ein $l \geq 1 \implies$ die
Auflösungsfunktion y ist C^l
- 2.) gelte $f(x_0) = y \in \mathbb{R}^m \implies$
die Niveaumenge $\{x : f(x) = y\}$ kann
entsprechend bei x_0 aufgelöst werden
(gehe über zu $\tilde{f}(x) := f(x) - y$)
- 3.) Seien irgendwelche m Spalten von
 $f'(x_0)$ l.u., d.h.

$$\exists 1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_m \leq n :$$

$$\det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_{\alpha_j}}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq m} \neq 0$$

Dann folgt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \text{ Umgebung } V \text{ von } x_0 \text{ in } U \text{ und} \\ \text{Funktionen } \lambda^1, \dots, \lambda^m \text{ mit} \\ V \cap N_f = \\ \{ x \in \mathbb{R}^n : x_{\alpha_j} = \lambda^j(\bar{x}), j=1, \dots, m \} \end{array} \right.$$

hierbei: $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^{n-m}$ der Anteil von x
mit Index $\neq \alpha_j, j=1, \dots, m$

Beweis: nummeriere die Variablen passend
um, also

$$\widetilde{f}(x) := f(T(x))$$

□

4.) Die Auflösungsfunktion φ aus dem Satz heißt „implizit definiert“, man hat die beschreibende Eigenschaft

$$(*) \quad f(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) = 0, \quad \hat{x} \in D.$$

Man differenziert $(*)$, wendet links die Kettenregel an und kann wegen der Rangbedingung an f' nach $\varphi'(\hat{x})$ auflösen, also die Ableitung von φ bestimmen $[\rightarrow \text{Übung!}]$

(vgl. Spezialfall $m=1$)

5.) Spezialfall $m=1$ 

Sei $f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\subset^1} \mathbb{R}, \quad x_0 \in U$ mit

$f(x_0) = 0$. Die "Rangbedingung"
ist äquivalent zur Forderung

$$\boxed{\nabla f(x_0) \neq 0}$$



$$\exists i \in \{1, \dots, n\} : \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \neq 0 \quad (*)$$

Gilt $(*)$, so sagt Satz 21.2 :

$\exists$ Umg. V von x_0 in U ,

$\exists$ Umg. D von

$(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x_0^{i+1}, \dots, x_0^{n-1})$ in $\mathbb{R}$,

$\exists \gamma: D \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$ mit $\{x \in V : f(x) = 0\}$

$= \{ (x_1, \dots, x_{i-1}, \gamma(x_1, \dots, \textcircled{x_i}, \dots, x_n), x_{i+1}, \dots, x_n) : \\ (x_1, \dots, \textcircled{x_i}, \dots, x_n) \in D \}$

Notation:

$$\underbrace{(x_1 \dots \overset{\circ}{x_i} \dots x_n)}_{\in \mathbb{R}^{n-1}} = \text{streiche } x_i \text{ heraus}$$

Für $\overset{\circ}{i} = n$ hat man als Ergebnis:

$$\{x \in V: f(x) = 0\} =$$

$$\{(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})) : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D\}$$

Ist $i \neq n$, so lässt sich diese Form nach Umbenennen der Variablen erzielen.

Berechnung der Ableitung von f im Fall

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \neq 0:$$

$$0 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})) \quad -83-$$

$$\ell=1, \dots, n-1 \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial x_\ell} f(\dots) = (\text{Kettenregel})$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_{\ell j}} \left(\underbrace{x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})}_{\substack{j^{\text{te}} \text{ Komponente von} \\ \downarrow}} \right) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\dots) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\dots) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(x_1, \dots, x_{n-1}) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\overbrace{x_1, \dots, x_{n-1}}^{=: \tilde{x}}) =$$

$$- \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(\tilde{x}, f(\tilde{x}))} \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$$

Das ist eine partiell Dgl. für f .

⑥ noch spezieller :

$$n = 2, m = 1$$

$$f: \mathbb{R}^2 \ni U \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

sei C^1 , es gelte

$$f(x_0, y_0) = 0$$

Fall 1 : $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

$$\Rightarrow \{(x, y) \in U; f(x, y) = 0\} \cap \text{Umg. von } (x_0, y_0)$$

$$= \text{Graph von } f: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad I =$$

Intervall um x_0

;

$$f(t, y(t)) = 0 \implies$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) = 0 \implies$$

$$y'(t) = - \frac{\partial_x f}{\partial_y f}(t, y(t))$$

gewöhnliche Dgl. für y

Fall 2 : $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0 \implies$

$$\{(x, y) \in U : f(x, y) = 0\} \cap \text{Umg. von } (x_0, y_0)$$

$$= \{(\psi(\rho), \rho) : \rho \in J\},$$

J = Intervall um y_0